Pesach Laksman

Lika och olika långa sträckor på geobrädet

Geobrädet ger möjligheter att arbeta med tal, såväl heltal som irrationella tal. Man kan visa att sträckor mellan punkter kan vara lika eller olika långa med hjälp av Pythagoras sats. Här ges förslag på hur man kan arbeta med sträckor och även med en elevs upptäckt.

Ett geobräde kan ge upphov till många aktiviteter. Här kommer vi att titta på olika kombinationer av sträckor och se vilka effekter det kan ge inom talteori. Ett vanligt geobräde är femspiksbrädet där det finns tjugofem spikar placerade i fem rader och fem kolumner.

Hur många olika långa sträckor finns det på ett vanligt geobräde? Vid första anblicken kan man bli skrämd av uppgiften. Hur ska man kunna hålla reda på vilka sträckor som är räknade? Och vilka av dem är lika långa?
Hade vi ändrat frågan till *Hur många sträckor finns det totalt?* skulle vi snart inse att de är fler än om vi ställer kravet på olika långa avstånd. Ändå kan den andra frågan klaras av enklare, för ur matematisk synpunkt är den identisk med frågan om antal hälsningar då tjugofem personer i ett sällskap träffas.

När vi behandlar den ursprungliga frågan om hur många *olika* sträckor det finns måste vi vara mer försiktiga. Det är lätt att inse att kortaste sträckans spikavstånd är 1 och sådana sträckor finns det ganska många av (vilket också är intressant att ta reda på, men ligger utanför ramarna för denna artikel). Det går också att förstå att ju längre sträckan är desto färre finns det, samt att den längsta sträckan ligger diagonalt över hela brädet och att det finns två av den sorten.

Vi startar från en gemensam spik som ligger i ett hörn (låt oss säga den övre vänstra) och ser att brädet kan delas i två symmetriska halvor av en diagonal som dras från spiken. Att gå m steg åt höger och därefter n steg nedåt skapar lika lång sträcka som att gå m steg nedåt åtföljt av n steg åt höger. På det sättet ser vi att på andra raden finns det fyra spikar av intresse för oss, på tredje tre osv och totalt finns det alltså $4+4+3+2+1=14$.

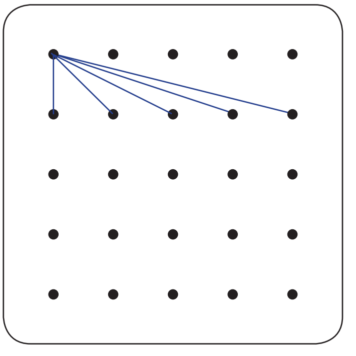


Fig 1. Några olika långa sträckor

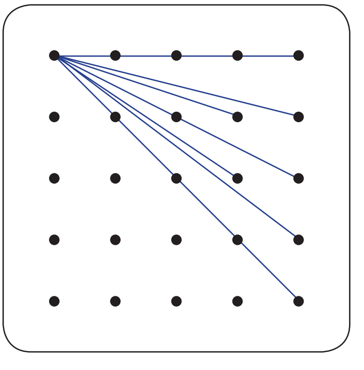


Fig 2. Fjorton olika långa sträckor på geobrädet. Kan du finna alla?

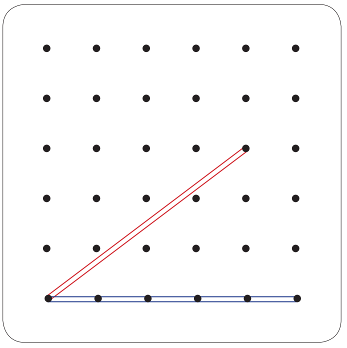


Fig 3. *Två lika långa sträckor på sexspiksbrädet*

Sexspiksbräde

En god matematisk sed påbjuder ofta generaliseringar. Därför kommer vi att förflytta oss till större bräden. Är man bekant med Pythagoras sats och dessutom vet hur forna egyptiska byggnadsslavar kontrollerade om vinklar var räta genom att använda en sluten lina med tolv knutar placerade på lika långa avstånd, kan man nästan inte undgå att se att på det utvidgade brädet finns det bland de tjugo (2+3+4+5+6) sträckorna två som är lika långa. Flyttar vi oss tre spikar uppåt och fyra åt sidan eller fem åt sidan får vi samma längd, 5 .

Ännu större bräden

Vi kan ana att ju större bräden vi har desto större problem måste det uppstå med dubbletter, dvs att samma sträcka återkommer mer än en gång, men hur hittar vi dem? Rent praktiskt skulle vi med hjälp av passare kunna rita bågar på ett kvadratiskt punktgitter och hitta punkter på samma avstånd från den övre vänstra spiken. En sådan metod är inte tillräckligt noggrann och avstånd som ser ut att vara lika långa behöver inte alls vara det. Ett annat sätt för att upptäcka dubbletter är att gå via pythagoreiska trianglar – rätvinkliga trianglar med heltalssidor.

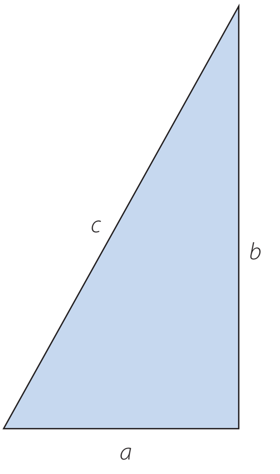
En elevs upptäckt

För många år sedan då jag hade en lektion om Pythagoras sats bad jag mina elever att ta reda på den andra kateten i den rätvinkliga triangeln med hypotenusan 41 och den kända kateten 40. En elev ropade omedelbart 9. Är denna metod generaliserbar och i så fall, under vilka förutsättningar? Elevens kvickhet är förstås beundransvärd men du som läsare vet förstås inte vad hans slutsats grundade sig på.

Till saken hör att det var det tredje exemplet och det första gick ut på att ta reda på hypotenusan i triangeln med kateterna 3 och 4, medan det andra var att ta reda på kateten i triangeln med hypotenusan 13 och den givna kateten 5. Skisserna av trianglarna med måtten utsatta fanns kvar på tavlan. Efter att de övriga eleverna hade fått komma med förslag på hur deras klasskamrat hade gjort upptäckten och vilka förutsättningar som måste gälla för att metoden ska vara tillämpbar, gav jag i uppgift att hitta en rätvinklig triangel med heltalssidor där en av kateterna är 7. Det tog inte särskilt lång stund förrän det fanns några händer i luften med svaret 24 och 25.

Lärdomar från elevens iakttagelse

Vi kan hitta många pythagoreiska taltripplar såsom (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25) och (9, 40, 41). Varje sådan taltrippel utgår från ett udda tal, det första talet i trippeln. Men vad händer om utgångskateten är ett jämnt tal? Vi kan ju alltid, utom i de fall då talet är tvåpotens, dividera talet med 2-faktorer tills vi får ett udda tal och angripa det som ovan. Därefter förlänger vi sidorna med det dividerade talet. Den metoden kan exemplifieras med triangeln där den kortaste kateten är 6. Vi reducerar med den högsta tvåpotensen och får 3 som ger taltrippel (3, 4, 5). Efter förlängning erhålls (6, 8, 10). Så kan vi göra med alla kateter vars längd inte är primtal för att få med samtliga lösningar. Som exempel tar vi talet 15. Dels kan vi på sedvanligt sätt hitta (15, 112, 113), dels kan vi bygga två andra trianglar baserade på 3 (15, 20, 25) och 5 (15, 29, 36). Att metoden fungerar så väl beror på konjugatregeln.



Om vi skriver Pythagoras sats på ett lite annorlunda sätt än vad vi är vana vid, $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$, ser vi mekanismen bakom. Vi letar efter ett talpar med samma summa som den givna katetens kvadrat och differensen 1. Tyvärr missar vi en massa taltripplar som baseras på 4-multiplar såsom 8, 12, 16 och 20. Detta kan åtgärdas med en liknande teknik och en något större arbetsinsats, här illustrerad med kateten 20. Tjugo är ett jämnt tal och då låter vi differensen mellan hypotenusan och den sökta kateten vara 2. Detta ger 202 = 400; 400/2 = 200; 200 = 101 + 99 och taltrippeln blir (20, 99, 101).

Den metoden ger oss, förutom att visa oss en snabb väg till skapande av rätvinkliga trianglar med heltalssidor, vetskap om alla vertikala sträckor (heltalssträckor) som har dubbletter bland lutande sträckor. Men kan inte två lutande sträckor ha samma längd utan att vara lika långa med någon vertikal sträcka?

Pensionsålder och Ramanujan

Då en av mina kollegor gick i pension blev jag ombedd att hålla ett tacktal. Det är allmänt bekant att när man fyller 65 år är det tänkt att man ska kliva av sin yrkesbana, vilket också min kollega gjorde. Det skulle kännas underligt om personens matematikintresse inte hade kommit på tal och en av ingångarna till mitt anförande blev just den aktuella åldern. Talet 65 är det minsta talet som kan skrivas som summan av två kvadrater på två sätt. Här ljög jag lite för att ett sådant tal är 50 som kan skrivas som $7^2 + 1^2$ och $5^2 + 5^2$ men om kravet är att ingen av kvadraterna får vara lika så talade jag sanning.

Mina tankar gick förstås till Ramanujan. När den tamilske matematikern låg på ett av Londons sjukhus fick han då och då besök. De flesta patienter nöjer sig med blombuketter i sådana situationer men för Ramanujan föreföll det vara alltför prosaiskt. Han föredrog tal, i matematisk mening, som present, vilket inte förorsakade besökarna någon utgift men väl krävde viss uppmärksamhet. Då professor Hardy kom på besök, ursäktade han sig med att den taxi som han hade åkt med hade ett väldigt ointressant nummer, nämligen 1729. Ramanujan höll inte alls med. Han konstaterade att det är det minsta tal som kan skrivas som summan av två kuber på två sätt: $10^3 + 9^3$ och $12^3 + 1^3$.

Man kan misstänka att Ramanujan kände till flera tal med den egenskapen. Här ska vi försöka med en mer anspråkslös uppgift, nämligen hur man hittar tal som kan skrivas som summor av kvadrater på två sätt.

Kvadrattalens omskrivning

Varje kvadrattal kan skrivas som en summa av konsekutiva udda tal med start från 1.

$1 = 1 \qquad 4 = 1 + 3 \qquad 9 = 1 + 3 + 5$

$16 = 1 + 3 + 5 + 7 \quad \ldots \qquad n^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$

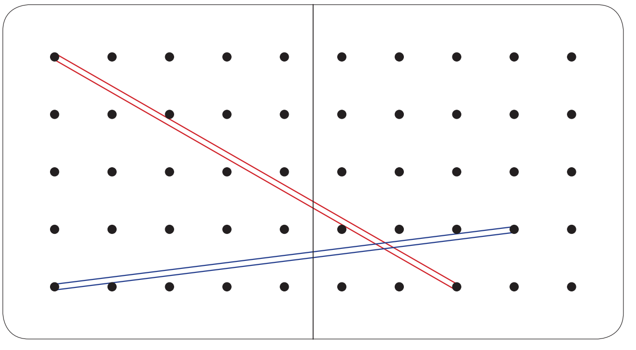
Nu skriver vi den oändliga summan av konsekutiva udda tal.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + \ldots$$

Om vi adderar de fem första talen får vi $5^2 = 25$, de sex första talen ger 36, osv. Vi ska leta efter ”öar” med tal vars summor är lika. Ett par sådana ”öar” utgörs av $3 + 5 + 7$ och 15. Vi vet att $3 + 5 + 7 = 15$. Men $3 + 5 + 7$ kan också uttryckas som $(1 + 3 + 5 + 7) - 1 = 4^2 - 1^2$ och 15 som $(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) - (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13) = 8^2 - 7^2$. Detta ger att $4^2 - 1^2 = 8^2 - 7^2$ vilket omskrivet blir $7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$.

Tillbaka till brädet

Med den ovan nämnda metoden kan vi alltså skapa lika långa sträckor vars längd inte längre behöver ha heltalsvärden. Går vi på vårt bräde sju steg åt höger och fyra neråt får vi en lika lång sträcka som om vi hade gått åtta steg åt höger och ett uppåt. Och längden av denna sträcka är $\sqrt{65}$.



LITTERATUR

Persson, I.O. (2000). Geometri med geobräde. *Nämnaren* 2000:4, s 28–31.
Jirotkova, D. & Littler, G. (2002). Geometri är mer än mönster. *Nämnaren* 2002:4, s 16–24.

Årets Ingvar Lindqvistpristagare i matematik

Kungl vetenskapsakademin har delat ut årets Ingvar Lindqvistpris. Ur juryns motivering:

Cecilia Eriksson, Alfaskolan i Solna, tilldelas 2012 års Ingvar Lindqvistpris i klassen matematik för sitt framgångsrika arbete med att få elever att tillvarata och utveckla sin matematiska talang och förmåga. Hennes stora engagemang och skicklighet leder eleverna till såväl breda kunskaper som djup förståelse.

Nämnarens redaktion gratulerar till den fina utmärkelsen och påminner samtidigt läsaren om möjligheten att redan nu nominera kollegor till nästa års pris. Besök www.kva.se.