Kerstin Larsson

Subtraktionsberäkningar

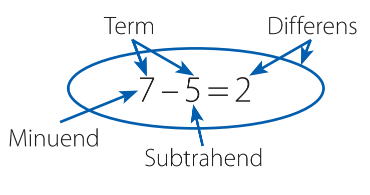
I förra numret av Nämnaren beskrev författaren olika situationer inom subtraktion och addition. Här fortsätter hon att behandla beräkningsstrategier för subtraktion samt hur de kan tydliggöras genom några olika didaktiska modeller. Dessutom diskuteras terminologifrågor.

I Lgr 11 står det att eleverna ska kunna *välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter* samt att eleverna ska arbeta med *centrala metoder för beräkningar.* Detta innebär att eleverna ska kunna utföra beräkningar på flera sätt. Det räcker inte med en generell metod som kan användas oavsett vilka tal som ingår i en uppgift. Med uttrycket *centrala metoder* avser kursplanen utvecklingsbara metoder, det vill säga metoder som är effektiva i den givna situationen, men samtidigt så generella att de är användbara i nya situationer. Eleverna ska också kunna värdera metoder och avgöra vilka metoder som passar bäst i olika situationer.

Terminologi

Läroplanen använder ordet *metod* både för det jag i denna artikel kallar *strategi* och för mer generella metoder som att använda miniräknare eller huvudräkning. När jag skriver om olika sätt att utföra en beräkning i huvudet, eller med stöd av papper och penna, kommer jag att använda orden *beräkningsstrategi* eller *strategi*. De olika beräkningsstrategierna har inte några vedertagna svenska namn, vilket syns i både didaktisk litteratur och i läromedel. Även i den engelskspråkiga forskningslitteraturen finns olika namn för samma strategier. De namn jag använder är alltså inte de enda förekommande. Det skulle förmodligen vara enklare att diskutera strategiernas egenskaper om vi hade samma benämningar.

Minuend och *subtrahend* är två ord som mer eller mindre har försvunnit ur den svenska matematikterminologin, vilket är synd. De är nämligen användbara då vi talar om olika subtraktionsberäkningar. I ett subtraktionsuttryck som $7 - 5 = 2$ har sjuan och femman olika roller och i vissa fall är det opraktiskt att kalla båda för term, vilket svensk terminologi förespråkar. Sjuan i ovanstående uttryck kan kallas för minuend och femman för subtrahend. Tvåan i uttrycket betecknas differens, liksom även hela uttrycket.



Beräkningsstrategier för flersiffriga tal

I den här artikeln presenterar jag olika beräkningsstrategier som används vid beräkningar med flersiffriga tal. Exemplen bygger på forskning om beräkningsstrategier, som har genomförts under lång tid och i flera olika länder. Strategierna används vid såväl ren huvudräkning som vid beräkningar med papper och penna. Papper och penna-metoder kan vara allt ifrån att skriva ner alla delberäkningar till att huvudsakligen räkna i huvudet och skriva ner vissa delresultat för att avlasta arbetsminnet.

Jag har delat upp beräkningsstrategierna i fem huvudkategorier som avspeglar hur generella eller lokala dessa är. I de mer generella strategierna betraktas de ingående talen *atomistiskt*, man ser till delarna och t ex i en algoritm behandlas alla siffror som ental. I de lokala strategierna finns ett *holistiskt* synsätt där talen betraktas som helheter. Jag vill poängtera att det inte ligger en värdering i denna åtskillnad, så att det ena är bättre än det andra. Det jag vill visa är att det är stor skillnad mellan beräkningsstrategier avseende hur generella de är och hur holistiskt man betraktar talen.

De fem huvudkategorierna kan delas upp i flera varianter och här redovisas några av de vanligaste som barn använder. För att exemplifiera strategierna visar jag hur man kan beräkna 64 – 26. Beräkningsstrategierna kan även användas vid beräkningar med tal som har fler siffror än två.

Lodräta algoritmer

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 10} \\ \cancel{6}4 \\ -26 \\ \hline 38 \end{array}$$

Första huvudkategorin är lodräta algoritmer, det vi i vardagligt tal kallar för uppställningar. Lodräta algoritmer kännetecknas av att varje siffra behandlas som om det vore ett ental, man tänker inte sextio (femtio) minus tjugo, utan sex (fem) minus två i tiotalskolumnen. Detta är anledningen till att de kallas *atomistiska*, man bortser från helheten, hur stora talen är och hur de båda talen relaterar till varandra. Lodräta algoritmer är också *generella* till sin karaktär, det vill säga man gör likadant oavsett vilka tal som ingår i beräkningen. De lodräta algoritmerna är inte avsedda för ren huvudräkning, utan för att utföras med papper och penna[1].

Talsortsvisa beräkningar

Den andra huvudkategorin är talsortsvisa beräkningar där båda talen delas upp i tiotal och ental. Subtraktionerna utförs med tiotalen för sig och entalen för sig. Till sist summeras de båda delresultaten. Exempel: 64 – 26

$64 - 26 = (60 - 20) + (4 - 6) = 40 + (-2) = 38$ eller
$64 - 26 = (60 - 20) + (4 - 6) = 40 - 2 = 38$

Talsortsvisa beräkningar kännetecknas av att talsorterna behandlas separat och de är därmed mer *atomistiska* än stegvisa beräkningar (se nästa kategori). De kan även anses vara relativt *generella* då man, om man kan hantera negativa tal, alltid kan göra på samma sätt. Många lär sig dock två olika varianter, en för subtraktion utan växling och en annan för subtraktion med växling. Jag skriver mer om detta i *Mer om beräkningar i addition och subtraktion* som finns att läsa på *Nämnaren på nätet*.

[1] Det finns ett flertal varianter av algoritmer beskrivna av Madeleine Löwing och Wiggo Kilborn i *Kulturmöten i matematikundervisningen* och jag hänvisar intresserade att läsa mer där.

Stegvisa beräkningar

Den tredje huvudkategorin är stegvisa beräkningar. Även här finns det fler varianter och jag visar tre av de vanligaste som jag kallar för *standard*, *med kompensation* och *kompletterande addition*.

Standard: 64 – 26

64 – 20 → 44; 44 – 6 → 38

Börja på minuenden, 64 i det här fallet, och hoppa 20 steg bakåt i talraden till 44. Hoppa därifrån ytterligare 6 steg bakåt till 38.

Med kompensation: 64 – 26

64 –30 → 34; 34 + 4 → 38

Börja på minuenden och hoppa för långt bakåt med jämna tiotal. Hoppa sedan framåt i talraden lika många ental som du hoppade för långt.

Kompletterande addition: 64 – 26

26 + 4 → 30; 30 + 30 → 60; 60 + 4 → 64, svaret är 4 + 30 + 4 = 38

Börja på subtrahenden, 26 i detta exempel, och hoppa framåt i talraden till närmsta jämna tiotal. Hoppa vidare framåt i talraden med jämna tiotal till 60 och hoppa avslutningsvis så många ental som behövs för att komma fram till minuenden. Håll reda på vilka hopp som har gjorts och addera dessa. Man kan också hoppa framåt med jämna tiotal, dvs

26 + 10 → 36 ; 36 + 10 → 46; 46 + 10 → 56; 56 + 8=64.

Det som kännetecknar stegvisa beräkningar är att den ena termen behålls som en helhet och den andra termen delas upp i lämpliga delar med hänsyn till vårt positionssystem. Eftersom ena termen behålls som en helhet är stegvisa beräkningar *mer holistiska* än de talsortsvisa. Samtidigt *minskar generaliteten* då valmöjligheterna är många för hur man ska hoppa framåt och bakåt och om man ska hoppa *med* jämna tiotal eller *till* jämna tiotal.

En vanligt förekommande variant är en blandning av talsortsvis beräkning och stegvis beräkning som kan se ut så här: 64 – 26

60 – 20 = 40; 40 + 4 = 44; 44 – 6 = 38

Här delas talen upp i tiotal och ental. Tiotalen beräknas först för sig. Därefter adderas minuendens ental till delresultatet och slutligen subtraheras subtrahendens ental.

Kompensationsberäkningar

Den fjärde huvudkategorin av beräkningsstrategier är kompensationsberäkningar. Det finns två typer: antingen ändras den ena termen eller så ändras båda.

Exempel där *ena termen ändras:* 64 – 26

26 → 30; 64 –30 =34; 34 + 4 =38.

Här ändras 26 tillfälligt till 30, som är ett jämnt tiotal, innan beräkningen utförs och sedan återställs den tillfälliga ändringen. Om den ena termen ändras menar en del att man alltid bör ändra subtrahenden till ett jämnt tiotal, andra menar att det beror på vilken av termerna som är närmast ett jämnt tiotal.

Exempel där *båda termerna förändras*: 64 – 26

26 → 30; 64 → 68; 68 – 30 = 38

Syftet med att förändra båda talen lika mycket är att det ena talet ska vara ett jämnt tiotal, oftast subtrahenden. Ändras båda termerna i en subtraktion lika mycket behöver man inte återställa ändringen eftersom skillnaden mellan termerna inte har förändrats.

Det som kännetecknar kompensationsberäkningar är att båda termerna behandlas som helheter, alltså är beräkningsstrategin *holistisk*. Det är också kännetecknande att man först undersöker hur de båda talen är beskaffade och utifrån detta väljer hur talen ska manipuleras före uträkningen. Det gör att denna strategi är *lokal* i motsats till *generell*.

Härledda talfakta

Den femte huvudkategorin kallar jag härledda talfakta. Ett exempel på hur någon skulle kunna tänka då det gäller härledda talfakta på uppgiften 52 – 26 är:

> *Jag vet att 25+25=50. Alltså måste 26+26 vara 52.*

Ett annat sätt att resonera:

> *En kortlek har 52 kort. Halva kortleken har 26 kort, alltså är 26 + 26 = 52.*

Härledda talfakta är en mycket *lokal* strategi som bygger på talfakta och de relationer till tal som den som utför beräkningen har. Det är den beräkningsstrategi som är mest *holistisk* i förhållande till hur man ser på talen som ingår i beräkningen och kännetecknas av att man betraktar talen och ser på hur de relaterar till varandra och andra tal samt kända talfakta.

De fem kategorierna i sammanfattning

Här visas en sammanfattande översikt över de fem huvudkategorierna utifrån hur generella och holistiska de är. Alla strategierna – utom kompletterande addition – har en motsvarande strategi för addition, och de beskrivs i en kortare artikel på *Nämnaren på nätet*.

	Huvudkategorier	**Några vanliga underkategorier**
Atomistisk Generell	*Lodräta algoritmer* Varje siffra behandlas som ental	Det finns många olika typer av lodräta algoritmer
↑	*Talsortsvis beräkning* Tiotal och ental behandlas separat	*Standard* *Blandad*
	Stegvisa beräkningar Ena termen behandlas som en helhet den andra delas upp, ofta talsortsvis	*Standard* *Med kompensation* *Kompletterande addition*
↓	*Kompensationsberäkningar* Båda termerna behandlas som helheter	*Ena termen ändras* *Båda termerna ändras*
Lokal Holistisk	*Härledda talfakta* Båda termerna behandlas som helheter och jämförs med andra tal	

Didaktiska modeller för att förstå strategier

Ett sätt att förstå strategier kan vara att sätta in beräkningarna i en kontext. Att kompensationsberäkningar då båda termerna förändras lika mycket alltid fungerar kan belysas med en jämförelsesituation:

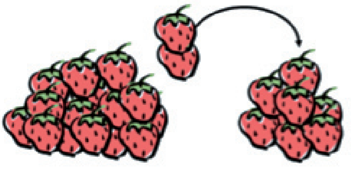
> Sofia har 64 tuschpennor och Martin har 26. Hur många fler har Sofia?
>
> Om både Sofia och Martin får ytterligare fyra pennor var, kommer skillnaden mellan deras penninnehav inte att ändras. Om båda ger bort lika många var kommer skillnaden inte heller att ändras.

För att förstå kompensationsberäkningar då endast den ena termen ändras passar inte jämförelsesituationen lika bra. Då kan minskning vara tydligare:

> Sofia har 64 kronor och handlar för 26 kronor.
>
> Hon betalar med en tjugokronorssedel och en tia, det vill säga hon minskar sin ”förmögenhet” med 30 kronor och har kvar 34. Eftersom hon betalade 30 kronor får hon tillbaka 4 kronor. Hon har alltså 34 + 4 = 38 kronor.

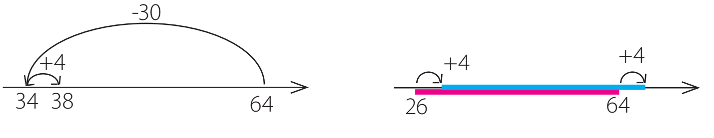
Textuppgifter med olika situationer kan väcka elevers vilja att prova olika sätt att räkna och tänka. Det är viktigt att uppmärksamma att bara för att en uppgift presenteras i en jämförelsesituation är man inte tvungen att använda en beräkningsstrategi som bygger på att ta reda på skillnaden. Man kan ha situationen med Sofias 64 och Martins 26 pennor som ska jämföras och formulera uppgiften som 64 – 26 för att sedan tänka som en stegvis minskning: *Jag tar först bort 20 från 64, då har jag kvar 44, sedan tar jag bort 6 till, då har jag 38 kvar.* Situationen i uppgiften måste alltså inte styra valet av beräkningsstrategi.

Även bilder, laborativt materiel och andra uttrycksformer kan hjälpa elever att förstå hur olika strategier fungerar. Kompensationsberäkningar för addition då båda termerna förändras kan lätt förstås med plockmateriel som läggs i två högar. Dessa högar ska räknas ihop. Då spelar det ingen roll om jag tar några från den ena högen och lägger i den andra innan jag räknar samman dem, för den totala mängden ändras inte.



Om jag däremot försöker mig på samma manöver i en subtraktion, att flytta över några föremål från den ena högen till den andra, så förändras skillnaden. Här blir innebörden av de båda räknesätten tydlig. Med ett ostrukturerat plockmateriel synliggörs strategins hållbarhet, men det visar inte varför det kan vara effektivt att förändra talen innan man börjar själva beräkningen.

För att synliggöra stegvisa beräkningar och att skillnaden inte ändras vid lika förändring av båda termerna i en subtraktionsuppgift kan en tom tallinje användas.



Med tallinjen synliggörs inte hur talsortsvisa beräkningar eller lodräta algoritmer fungerar. För att illustrera dessa – oavsett om de görs i huvudet, lodrätt eller vågrätt med papper och penna – passar ett tiobasmateriel betydligt bättre.

Om man vill visa en minskning kan man lägga upp materiel för minuenden och plocka bort det antal som subtrahenden anger. Om vi istället lägger upp materiel både för minuenden och subtrahenden invid varandra illustreras skillnaden.

Detta är några didaktiska modeller i form av materiel, bilder och ord/kontext som kan förstärka förståelsen för hur räknesätten och olika beräkningsstrategier fungerar. Det finns givetvis mycket mer att göra för att skapa möjligheter för eleverna att förstå räknesättens egenskaper och att översätta olika representationer eller uttrycksformer för tal, situationer och beräkningar. Det är dock viktigt att man som lärare också är medveten om de olika uttrycksformernas begränsningar.

Beräkningsstrategiers begränsade effektivitet

Forskare har undersökt hur effektiva olika strategier för huvudräkning är. Med effektiv menar man i allmänhet att beräkningarna leder till korrekt svar och utförs relativt snabbt. I en stor undersökning bland brittiska 11-åringar som genomfördes 1987, och som analyserades på nytt i början av 2000-talet, framgick det att talsortsvisa beräkningar föredrogs av de elever som hade sämst resultat. I samma undersökning kunde man se ett samband mellan de elever som hade bäst resultat och val av beräkningsstrategi. Dessa elever valde oftare stegvisa strategier och dessa strategier ledde oftare till korrekta svar.

Då det gäller lodräta algoritmer visar flera studier från västvärlden att många elever får fel resultat då talen i uppgiften kräver växling. De vanligaste felen kan härledas till att växlingen inte sker, utan eleven drar det mindre talet från det större oavsett om det hör till minuend eller subtrahend. I uppgiften 64 – 26 räknas 6 – 4 i entalskolumnen och 6 – 2 i tiotalskolumnen varpå svaret blir 42. Dessa studier visar tydligt att många elever inte lär sig att utnyttja lodräta algoritmer för subtraktionsberäkningar effektivt.

I talsortsvisa beräkningar gör många elever samma typ av fel som i de lodräta algoritmerna då subtraktionsberäkningen kräver växling. De håller inte heller här reda på vilket av de båda tiotalen respektive entalen som hör till minuend respektive subtrahend, utan tar konsekvent det större talet och minskar med det mindre.

Stegvisa strategier ligger tankemässigt nära de strategier som de flesta barn spontant utvecklar inom addition och subtraktion med ensiffriga tal. En del forskargrupper menar att detta kan utnyttjas av lärare, om de lyssnar på hur eleverna tänker då de utför beräkningar och också skapar klassrumssituationer där eleverna kan berätta för varandra hur de tänker då de räknar.

En utvecklad text om strategiers begränsade effektivitet finns på *Nämnaren på nätet*.

Andra påtalar att det finns en risk att eleverna fastnar i ett stegvist räknande där de räknar ett steg i taget på talraden, framåt för addition och bakåt för subtraktion, utan att utnyttja vårt positionssystems uppbyggnad.

Även kompensationsberäkningar kan vara en källa till felaktiga svar samtidigt som en del elever utnyttjar dem mästerligt. Det är svårt för många att hålla reda på när man ska öka båda termerna lika mycket (subtraktion) eller minska den ena med lika mycket som man ökar den andra (addition). Ännu svårare verkar det vara att göra rätt då man har rundat av den ena termen innan beräkningen och sedan ska återställa ändringen.

Härledda talfakta är en så pass lokal och personlig strategi att man inte funnit generella styrkor eller svårigheter med den. Däremot finns det studier som visar att elever med god taluppfattning oftare använder härledda talfakta än andra elever.

Strategiers relativa effektivitet

Hur ska lärare koppla samman kursplanens intentioner om att centrala metoder (strategier med mitt språkbruk) ska vara både *effektiva* och *generella* med forskning kring olika strategiers effektivitet? De mest generella strategierna är atomistiska och har visat sig vara ineffektiva för stora grupper av elever. De mest holistiska strategierna är inte generella.

Det finns inte någon enkel regel för när en viss strategi är bättre än en annan. Strategiers effektivitet hänger samman med personen som använder den och hur hon förstår strategin och räknesätten. En person som behärskar en lodrät algoritm till fullo och dessutom har ett väl utvecklat arbetsminne kan producera korrekta och snabba svar – trots att lodräta algoritmer klassas som synnerligen ineffektiva för huvudräkning av i stort sett alla forskare. En person med god taluppfattning kan med gott resultat använda olika strategier vid olika uppgifter eftersom talen har relationer sinsemellan som denna person snabbt uppfattar. En person som aldrig har upptäckt hur talen och räknesätten hänger samman och kämpar med att komma ihåg vilka olika regler som gäller för olika strategier kanske inte alls lyckas komma fram till korrekt svar. Det underlättar alltså med *gott arbetsminne*, *god taluppfattning* och *kunskap om räknesättens egenskaper*.

En del av taluppfattningen som påverkar en strategis relativa effektivitet är att kunna se *sambanden mellan de olika räknesätten och talens storlek och relationer*. Många ser det som mer naturligt att använda strategin med kompletterande addition då talen är relativt nära varandra så som till exempel $64 - 58 = 2 + 4 = 6$ medan de hellre använder lika förändring av båda termerna i en uppgift som $53 - 29 = 54 - 30 = 24$ eftersom talen inte ligger så nära varandra och subtrahenden är nära ett jämnt tiotal. Det är dock inte nödvändigtvis enklare för alla att göra på det ena eller det andra sättet.

Om undervisning

En person med väl utvecklad taluppfattning, som inkluderar räknesättens egenskaper, har andra möjligheter att lära sig, förstå och använda olika beräkningsstrategier än en person som memorerar olika regler för hur man ska göra. Detta samband är även omvänt så att den som förstår, och får tillfälle att använda och utveckla olika strategier, utvecklar en god taluppfattning medan den som enbart tränar procedurer och memorerar fakta inte gör det. Tyvärr finns det inte ett lika entydigt svar på hur undervisningen kan stötta denna utveckling för alla elever. Det finns studier som visar att en undervisning där flera olika strategier behandlas kan förvirra de elever som inte har så välutvecklad taluppfattning, medan andra studier visar att *samtliga* elever utvecklar sin förmåga att hantera tal, räkning och att välja lämpliga beräkningsstrategier då undervisningen fokuserar detta.

Hur undervisningen är upplagd avseende elevernas möjlighet att bygga upp vad som kan kallas *number sense* har troligen betydligt större inverkan än vilka strategier som behandlas. Number sense omfattar bland annat en god förståelse för talens storlek, relationer till varandra, räknesättens innebörder och inbördes samband samt kunskaper om talens och räknesättens egenskaper. Övergripande för många lyckade försök med att låta eleverna arbeta med olika beräkningsstrategier är att de har utgått från elevernas egna tankar och strategier. Det har alltså inte varit strategier som läraren, eller läromedlet, har lärt ut till klassen. Däremot har eleverna aktivt tagit del av varandras tankar om räknande. Ytterligare en framgångsfaktor är att klassrumsnormen på matematiklektionerna är utforskande, det vill säga att alla elever kan och vill uttrycka sina tankar och lyssna på kamraternas samt att den diskussion och argumentation som förs är grundad i matematiska argument, inte personligt tyckande eller social status.

Den avgörande frågan är således inte vilka beräkningsstrategier som är mest effektiva eller generella. Det handlar istället om en undervisning som ger eleverna möjlighet att förstå de olika strategierna, det vill säga *hur, när* och *varför* de fungerar samt vilka begränsningar de olika strategierna har. Denna förståelse hänger samman med kunskap om hur räknesätten fungerar och relaterar till varandra samt hur tal kan byggas upp och relatera till varandra.

LITTERATUR

Engström, A. (2000). Det ser rätt ut – men är ändå fel. I *Nämnaren 2000:4*, 21–24.

Foxman, D. & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in the UK. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1–2), 41–69.

Larsson, K. (2011a). Subtraktion. *Nämnaren*, 2011:4, 46–50.

Larsson, K. (2011b). *Varför ska man "göra olika"?: En litteraturstudie om beräkningsstrategier för subtraktion*. Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms univetsitet.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2010). *Kulturmöten i matematikundervisningen: Exempel från 41 olika språk*. Lund: Studentlitteratur.

Reys, B. J. & Reys, R. E. (1995). Perspektiv på number sense och taluppfattning. *Nämnaren*, 1995:1, 28–33.

Varol, F. & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Educational Journal*, 35(1), 89–94.