Natalia Karlsson & Wiggo Kilborn

När kan elever börja räkna med kvadratrötter?

När i elevernas skolgång är det lämpligt att introducera kvadratrötter? Tecknet i sig och användningen av irrationella tal kan skymma intressanta och angelägna användningsområden för kvadratrötter. I denna artikel ifrågasätts varför många lärare dröjer så länge med att introducera kvadratrötter. Vi får också förslag på hur area kan användas för att grundlägga en förståelse för begreppet.

Vi har under senare år uppmärksammat att ovanligt många elever på gymnasiet har svårigheter med att hantera uppgifter som handlar om kvadratrötter. En orsak till detta kan härledas till undervisningen i grundskolan. Exempel på detta framgår av en undersökning som genomfördes för några år sedan i Uppsala under våren i årskurs 8 och omfattade drygt 1400 elever (Löwing & Kilborn, 2008). Den gav bland annat följande resultat:

uppgift	lösningsfrekvens
$\sqrt{49}$	43%
$\sqrt{16}+\sqrt{9}$	30%
$\sqrt{(16+9)}$	26%
$\sqrt{(17^2)}$	16%

När vi diskuterade orsakerna menade flera lärare att de inte tar upp kvadratrötter förrän i årskurs 9, främst beroende på att läroboken inte gör det. *Det handlar ju om irrationella tal*, som någon uttryckte det. Vi menar att det i själva verket handlar om en mindre genomtänkt didaktisk planering. De exempel vi just gett handlar inte om irrationella tal utan om naturliga tal.

Men vari består problemet? Elever brukar möta kvadrattalen tidigt och vet att $49 = 7^2$. De vet också att en kvadrat med sidan 7 cm har arean 49 cm^2. Att mot denna bakgrund införa begreppet kvadratrot som invers till kvadrat är i själva verket inte svårare än att införa division som invers till multiplikation. Vi ska i den här artikeln utveckla vår syn på detta.

Kvadratrötter och naturliga tal

När vi definierar begreppet kvadratrot och motsvarande räkneregler, väljer vi ofta att vänta tills det går att ge en generell algebraisk definition, alltså en som även omfattar irrationella tal. Problemet med detta är, enligt matematikdidaktikern Hans Freudenthal (1973), att eleverna inte har något att hänga upp sina kunskaper på. Ofta saknas det en konkret bild av det som ska uppfattas.

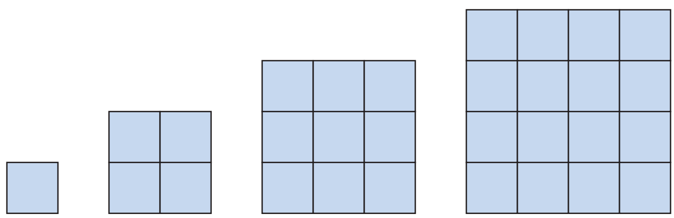
Vad Freudenthal förespråkade var istället en *progressiv schematisering* där han menar att inlärningen blir betydligt enklare om vi successivt bygger upp kunskapen. Eleverna känner då redan igen vissa delar av det som ska läras, vilket ger en helt annan motivation och gynnar inlärningen. Samma idé kan för övrigt härledas från Vygotskij (1972). Om lärare ska lyfta elevernas kunskaper till en ny nivå och utgå från den proximala zonen, måste det finnas kunskap att utgå från inom zonen ifråga. För att utveckla idén börjar vi med att ge en preliminär definition av kvadratrot som fungerar om man begränsar sig till kvadratrötter som är naturliga tal:

Om a är ett naturligt tal så är $\sqrt{a^2} = a$.

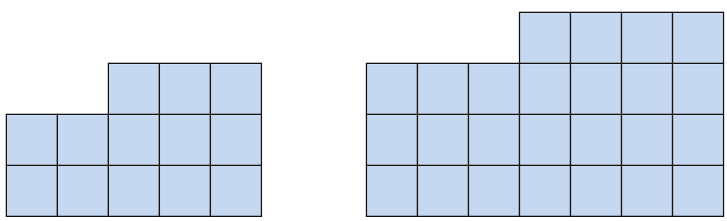
En sådan definition kan förstås av elever i relativt tidig ålder om vi kopplar den till kvadratens area. Vi kan då uttrycka definitionen så här:

Kvadratroten till a^2 är längden av sidan i en kvadrat med arean a^2, alltså a.

För yngre elever måste detta konkretiseras. Av följande figurer framgår det att $\sqrt{1} = 1$, att $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$, att $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ och att $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$.



De kan också, genom att kombinera figurerna, se att $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ och att $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.



$2^2 + 3^2$ $3^2 + 4^2$

En intressant fråga är hur svårt det är för en elev att förstå och använda rot- och kvadrattecken. Vi menar att det logiskt sett inte är svårare att använda dessa tecken än +, – eller =. Det är i själva verket så att ett tecken bara är en etikett på något. När en elev har problem med ett tecken är det sällan tecknet i sig som vållar problem, utan det är begreppet – och för den som inte förmår uppfatta begreppet saknar tecknet innebörd.

Att räkna med kvadratrötter

Det vi kunnat iaktta i grundskolan är, som redan nämnts, att kvadratroten införs alldeles för sent och att den då kopplas till irrationella tal. Vi vill nu vända på det och visa hur långt man kan komma redan med de vanliga räknelagarna och med naturliga tal. När eleverna har abstraherat den ovan givna definitionen via kvadratens area, kan de (om de behärskar kvadrattalen) utan hjälp av figurer tolka $\sqrt{9} = 3$ och $\sqrt{4} = 2$. Vi kallar detta för andra ordningens konkretisering eftersom detta nu kan uppfattas som så konkret av eleven, att det kan användas till att generalisera kunskapen. Med hjälp av de vanliga räknereglerna (för naturliga tal) kan eleverna i nästa steg även uppfatta:

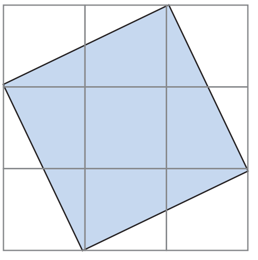
$\sqrt{9} + \sqrt{4}$ som $3 + 2$ $\qquad$ $\sqrt{9} - \sqrt{4}$ som $3 - 2$

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$ som $3 \cdot 2$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$ som $\dfrac{3}{2}$

De kan även räkna sig fram till samband som $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$ och $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$, operationer som många elever misslyckades med i årskurs 8. Inte heller uppgifter som $\sqrt{17^2}$ behöver vålla problem. Med vår preliminära definition handlar detta i själva verket om sidan i en kvadrat med arean 17^2 och här har vi ju fått sidan 17 helt gratis. Däremot är $(\sqrt{17})^2$ mer problematiskt (som kvadraten av ett irrationellt tal), medan $(\sqrt{16})^2$ helt enkelt är lika med $4^2 = 16$. Varför har man då så svårt med detta i svensk skola? Svaret är, enligt vår uppfattning, att man kopplar detta till de irrationella talen, och därmed uppfattar eleverna kvadratroten i sig som något svårt.

Övergång till irrationella tal

Vi har båda följt ett stort antal lektioner på grundskolans högstadium. Under dessa lektioner har vi sällan sett lärare diskutera matematik i den mening som lyfts fram i kursplanens syfte. Som en övergång till (och för att skapa en förförståelse inför) introduktionen av irrationella tal, kan man betydligt tidigare än idag börja reflektera över gränserna för begreppet kvadratrot. Samtidigt kan man, helt enligt kursplanens syfte, ge *eleverna förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet* och att *utveckla kunskaper om historiska sammanhang*. Som exempel kan man diskutera tolkningen av $\sqrt{2}$ och $\sqrt{5}$. Visserligen är varken 2 eller 5 kvadrattal, men med hjälp av den preliminära definitionen bör $\sqrt{5}$ betyda mätetalet för sidan i en kvadrat med arean 5 cm^2. Nog måste det finnas sådana kvadrater och även de har en sida. För elever som tvivlar på detta kan man rita en figur där den större kvadraten har arean 9 cm^2 och de delar som inte är skuggade har arean 4 cm^2 tillsammans. Det innebär att det skuggade kvadraten har arean 5 cm^2.



Genom att pröva sig fram på en miniräknare finner man att $2{,}2^2 < \sqrt{5} < 2{,}3^2$ alltså att $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ eller ännu bättre, att $2{,}232 < \sqrt{5} < 2{,}242$ och så vidare. Tydligen svarar $\sqrt{5}$ mot ett tal som man kan beskriva hur noga som helst med hjälp av ett närmevärde. Det innebär att det för varje naturligt tal *a* verkar finnas en kvadratrot $\sqrt{a}$, även om talet inte alltid kan skrivas som ett rationellt tal. Detta kan i sin tur kopplas till matematikens och de reella talens historia.

Kvadratrötter och reella tal

För att kunna vidareutveckla kunskaperna om kvadratrötter krävs det emellertid en bättre definition och ett par räkneregler som eleverna redan har mött i samband med naturliga tal och rationella tal. En mer generell definition kan se ut så här:

$\sqrt{a}$ är den icke negativa roten till ekvationen $x^2 = a$.

För att reda ut gränserna för den här definitionen analyserar vi lösningen till följande ekvationer:

$x^2 = 4$ $\qquad x^2 = (-4)$ $\qquad$ och $(x + 1)^2 = 4$

Mer generellt handlar det om innebörden av $\sqrt{a^2}$, $(\sqrt{-a})^2$, $\sqrt{-a^2}$ och $(\sqrt{-a^2})^2$ för olika värden på a. För elever som har fått arbeta med kvadratrötter som naturliga tal och rationella tal, blir diskussioner om detta inte något nytt och främmande utan enbart en fördjupning av vad de redan känner till – men nu på en mer stringent nivå. För att komma vidare och arbeta med irrationella tal krävs det två räkneregler. I övrigt gäller de vanliga räknelagarna från de naturliga och rationella talen.

Om $a \geq 0$ och $b \geq 0$ gäller $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Om $a \geq 0$ och $b > 0$ gäller $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Utgående från dessa generella regler kan eleverna nu, med full förståelse, arbeta med uppgifter som $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$ och $\sqrt{2}/\sqrt{9} = \sqrt{2}/3$ och senare med uppgifter som $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$ och $1/(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$.

Några avslutande kommentarer

Vår avsikt med den här artikeln är att visa på problemen med att vänta för länge med att introducera kvadratrötter och att räkna med dem. Alltför många nya svårigheter kommer då att staplas på varandra och det räcker med att en elev får problem med en enda detalj för att missa helheten. Vi föreslår att man kan inleda det här arbetet betydligt tidigare, utgående från en förenklad och konkretiserbar definition, följt av enklare beräkningar inom ett begränsat talområde. En annan fördel med detta är att elever, som inte förmår arbeta med kvadratrötter fullt ut, åtminstone kan uppfatta delar av begreppet och tillämpa det inom ett begränsat talområde.

Vi vill i det här sammanhanget ta upp ett annat viktigt begrepp som får för lite utrymme i svensk undervisning, nämligen invers. Bland de naturliga talen finner vi att $(-x)$ är additiv invers till x och bland de rationella talen att $1/x$ är multiplikativ invers till x. På motsvarande sätt är det viktigt att framhålla att $\sqrt{x}$ är inversen till x^2. För elever som lärt sig uppfatta begreppet invers blir det betydligt lättare att senare uppfatta nya begrepp som att $\ln x$ inte är något märkvärdigt utan helt enkelt inversen till e^x.

LITTERATUR

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel publishing company.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2008). *Att våga se – och kunna ta ansvar.* Intern rapport för Uppsala kommun.

Vygotskij, L. S. (1972). *Thought and language*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.